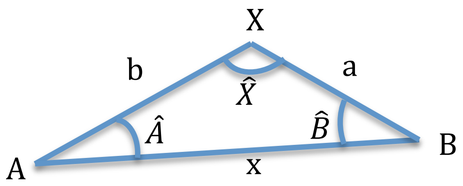
1. (Proposto pelo professor) Para calcular a distância entre um ponto A e um ponto inacessível X, um engenheiro mediu a distância de A até um ponto acessível B, além dos ângulos $B\widehat{A}X$ e $A\widehat{B}X$. Supondo que $AB = 600\text{m}$, $B\widehat{A}X = 25°$ e $A\widehat{B}X = 56°$, calcule a distância entre A e X.

Resolução:

Utilizando os dados fornecidos no enunciado, construímos o triângulo abaixo, de modo que $x = 600\text{m}$, $\widehat{A} = 25°$ e $\widehat{B} = 56°$. Queremos obter a distância $AX = b$.




Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180°, podemos obter o ângulo $\widehat{X}$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{X} = 180°$$
$$\widehat{X} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180° - 81° = 99°$$

Deste modo, aplicando a lei dos senos, temos

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{x}{\sin \widehat{X}}$$
$$b = x\frac{\sin \widehat{B}}{\sin \widehat{X}}$$

Substituindo os valores fornecidos no enunciado

$$b = 600 \,.\, \frac{\sin 56°}{\sin 99°}$$

$\sin 56° = 0{,}829$
$\sin 99° = 0{,}988$

Logo

$$b = 600 \,.\, \frac{0{,}829}{0{,}988} = 503{,}4\text{m}$$
$$b = 503{,}4\text{m}$$

2. Uma escada está apoiada em um muro de $2\text{m}$ de altura, formando um triângulo isósceles, cujo ângulo é $45°$. Sabendo que o ângulo entre o muro e o chão é de 90°. Qual é o comprimento da escada?

Resolução:

Se forma um triângulo retângulo isósceles, então os ângulos da base são congruentes, e os outros dois lados além da base também são.

O ângulo entre o muro a escada é de $45°$ e o ângulo entre o muro e o chão é o de $90°$, caso contrário, a única possibilidade possível seria que o ângulo entre a escada e o chão fosse de $90°$, isso seria o mesmo que dizer que a escada está paralela ao muro e perpendicular ao chão.

Primeira Resolução:

$$\sin 45° = \frac{2}{x}$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{x}$$
$$x = \frac{4}{\sqrt{2}}$$
$$x = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}$$
$$x = \frac{4\sqrt{2}}{2}$$
$$x = 2\sqrt{2}$$

Portanto, o comprimento aproximado da escada é de 2,83 metros.

Segunda Resolução:

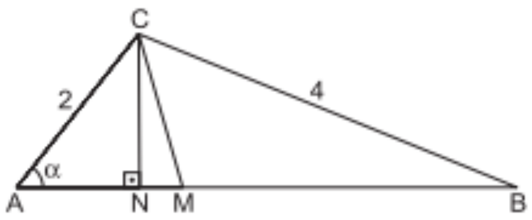
Essa questão também poderia ser resolvida utilizando o Teorema de Pitágoras.

$$x^2 = 2^2 + 2^2$$
$$x^2 = 8$$
$$x = \sqrt{8}$$
$$x = \sqrt{2^2.2}$$
$$x = \sqrt{2^2}.\sqrt{2}$$
$$x = 2\sqrt{2}$$

3. (FUVEST 2004) Um triângulo ABC tem lados de comprimento $AB = 5$, $BC = 4$ e $AC = 2$. Sejam M e N os pontos de $\overline{AB}$ tais que $\overline{CM}$ é a bissetriz relativa ao ângulo $A\hat{C}B$ e $\overline{CN}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AB}$. Determinar o comprimento de $\overline{MN}$

Resolução

Seja $C\hat{A}B = \alpha$, conforme a ilustração abaixo.




Seja $x = AM$. Como $AB = 5$, temos então que $MB = 5 - x$. Desta forma, pelo Teorema da Bissetriz Interna (demonstração no canal oficial do PROFMAT, pelo professor Eduardo Wagner, segundo o link [https://youtu.be/3fcdXlXlta4](https://youtu.be/3fcdXlXlta4) , a partir de 2:57):

$$\frac{AM}{AC} = \frac{BM}{BC} \leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{5-x}{4} \to 10 - 2x = 4x \to x = \frac{5}{3} \to AM = \frac{5}{3}$$

Aplicando a Lei dos Cossenos para o triângulo ABC, temos que

$$4^2 = 2^2 + 5^2 - 2.2.5.\cos\alpha \to -\cos\alpha = -\frac{13}{20} \to \cos\alpha = \frac{13}{20}$$

Agora, tomando o triângulo retângulo ANC, segue que

$$\cos\alpha = \frac{AN}{AC} \to AN = AC.\cos\alpha \to AN = \frac{2.13}{20} \to AN = \frac{13}{10}$$

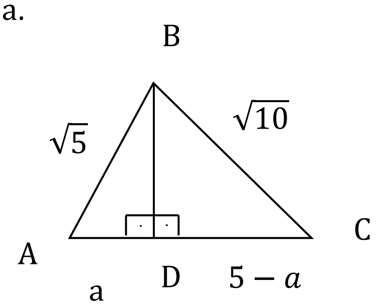
Por fim, $MN = AM - AN \to MN = \frac{5}{3} - \frac{13}{10} = \frac{50-39}{30} = \frac{11}{30}$.

Assim, $MN = \frac{11}{30}$.

4. (FUVEST-SP) Os lados de um triângulo medem $\sqrt{5}, \sqrt{10}$ e 5. Qual o comprimento da altura relativa ao lado maior?

Resolução

Assumindo que a altura encontra a base no ponto D e divide o lado AC em duas partes: a e $5 - a$.




Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABC, referente ao ângulo α:

$$(\sqrt{10})^2 = (\sqrt{5})^2 + 5^2 - 2 * \sqrt{5} * 5 * \cos(\alpha)$$
$$10 = 30 - 10\sqrt{5} * \cos(\alpha)$$
$$\cos(\alpha) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

No triângulo ABD:

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$
$$5a = 10$$
$$a = 2$$

Ainda em ABD, aplicando Pitágoras:

$$h^2 + 2^2 = (\sqrt{5})^2 \Rightarrow h = 1$$

5. ITA 2008 – Sendo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ o contra domínio da função arcoseno e $[0, \pi]$ o contradomínio da função arcocosseno, calcule o valor de

$$\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{3}{5} + \arccos\frac{4}{5}\right)$$

Resolução:

Tomemos um triângulo retângulo com um cateto de medida $3x$ e hipotenusa de medida $5x$. Por Pitágoras, temos:

$$(5x)^2 = (3x)^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad y = 4x$$

Sendo assim, tomando $\alpha$ como o ângulo oposto ao cateto de medida 3x deste triângulo, teremos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5} \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \frac{4x}{5x} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{arcsen}\frac{3}{5} = \alpha \quad \text{e} \quad \arccos\frac{4}{5} = \alpha$$

Então, substituindo, temos:

$$\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{3}{5} + \arccos\frac{4}{5}\right) = \cos(\alpha + \alpha) =$$

$$= \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$